ПРОБЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
ЗА КАНДИДАТ-СТУДЕНТИ

18 април 2004 г.

KAIOWAS – MATH

Задача 1. Да се реши:

а) уравнението $\log_2\left(|x+8|-10\right)+\log_{0,5}(2x-5)=0$;

б) неравенството $\dfrac{\left(4x^2+3+4x\sqrt{3}\right)(x-1)}{11x-3x^2-6}\le 0$.

Задача 2. Диагоналите AC и BD на трапеца ABCD ($AB \parallel CD$) се пресичат в точка E, а правите AD и BC – в точка F. Нека M и N са пресечните точки на правата EF съответно с основите AB и CD.

а) Да се намери отношението $AM : MB$.

б) Ако $AC = 11$ cm, $BD = 10$ cm и $AM + CN = 6$ cm, да се намери лицето на трапеца ABCD.

Задача 3. В триъгълната пирамида ABCD стената ABD е перпендикулярна на основата ABC, ъглите между околните ръбове са по 60° и $AD = BD = 2$ cm.
Да се намери:

а) обемът на пирамидата ABCD;

б) ъгълът между правата AD и равнината (BCD).

Задача 4. Дадено е уравнението $5^{\cos 2x}+a.25^{\sin^2 x}-6=0$, където a е реален параметър.

а) Да се реши уравнението при $a=1$.

б) За кои стойности на a даденото уравнение има решение в интервала $\left(\dfrac{3\pi}{4};\pi\right)$?

РЕШЕНИЯ:

Задача 1. а) Уравнението има смисъл при $|x+8|-10>0$ и $2x-5>0$, т.е. при $x \in (2,5;+\infty)$.

$\log_2\left(|x+8|-10\right)+\log_{0,5}(2x-5)=0 \Leftrightarrow \log_2\left(|x+8|-10\right)+\log_{2^{-1}}(2x-5)=0 \Leftrightarrow$

$\log_2\left(|x+8|-10\right)-\log_2(2x-5)=0 \Leftrightarrow \log_2\left(|x+8|-10\right)=\log_2(2x-5) \Leftrightarrow |x+8|-10=2x-5 \Leftrightarrow$

$|x+8|=2x+5 \Leftrightarrow x+8=2x+5$ (понеже при $x>2,5$ имаме, че $x+8>0$ и $|x+8|=x+8$) $\Leftrightarrow$

$\mathbf{x=3}$ $(3 \in (2,5;+\infty))$.

б) Неравенството има смисъл при $11x-3x^2-6 \neq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty;\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3};3\right) \cup (3;+\infty)$.

$\dfrac{\left(4x^2+3+4x\sqrt{3}\right)(x-1)}{11x-3x^2-6} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{\left(2x+\sqrt{3}\right)^2(x-1)}{3(x-3)\left(x-\frac{2}{3}\right)} \ge 0$. По метода на интервалите получаваме, че

$\mathbf{x \in \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \cup \left(\frac{2}{3};1\right] \cup (3;+\infty)}$.

Задача 2. а) За определеност можем да считаме, че $AB>CD$. Имаме, че $DN \parallel AM$ и $CN \parallel MB$

$\Rightarrow \frac{DN}{AM}=\frac{FN}{FM}$ и $\frac{CN}{MB}=\frac{FN}{FM}$, откъдето $\frac{DN}{AM}=\frac{CN}{MB} \Rightarrow CN=\frac{DN.MB}{AM}$ (1). От $CN \parallel AM$ и $DN \parallel MB$ получаваме, че $\frac{CN}{AM}=\frac{NE}{ME}$ и $\frac{DN}{MB}=\frac{NE}{ME} \Rightarrow \frac{CN}{AM}=\frac{DN}{MB} \Rightarrow CN=\frac{DN.AM}{MB}$ (2). От (1) и (2) $\Rightarrow \frac{DN.MB}{AM}=\frac{DN.AM}{MB} \Leftrightarrow$

$AM^2=MB^2 \Leftrightarrow AM=MB$ (понеже $AM>0$ и $MB>0$) $\Rightarrow$ **$AM:MB=1:1$.**

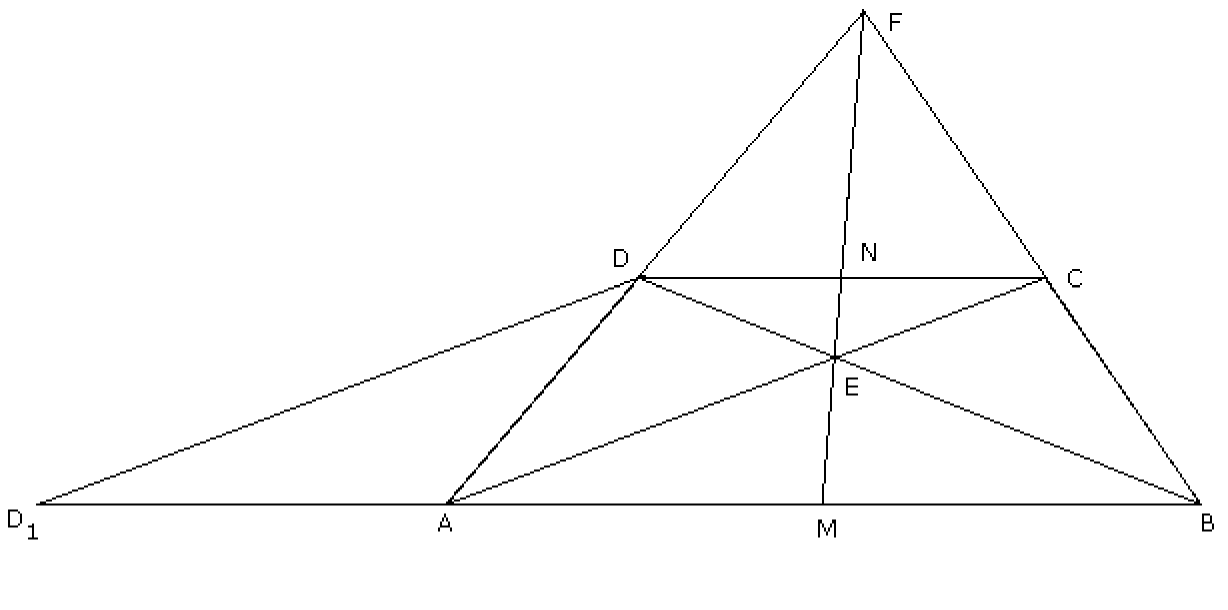
б) От подточка а) имаме, че $CN=\frac{DN.MB}{AM}=\frac{DN.AM}{AM}=DN$, т.е. $CN=ND$. Построяваме $DD_1 \parallel AC$ $(D_1 \in AB)$. Тъй като $AD_1 \parallel CD \Rightarrow ACDD_1$ е успоредник $\Rightarrow DD_1=AC=11$ cm и $AD_1=CD \Rightarrow$

$D_1B=D_1A+AB=AB+CD=2AM+2CN=2(AM+CN)=2.6=12$ cm. Нека $\sphericalangle D_1DB=\varphi \Rightarrow$

$\cos\varphi=\dfrac{DD_1^2+BD^2-BD_1^2}{2DD_1.BD}=\dfrac{11^2+10^2-12^2}{2.11.10}=\dfrac{7}{20}$. Понеже $\varphi \in (0;\pi) \Rightarrow \sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=$

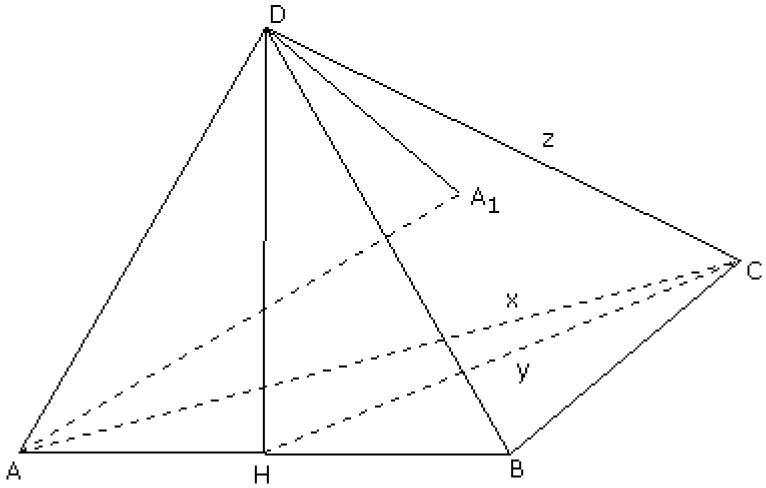
$=\sqrt{1-\left(\frac{7}{20}\right)^2}=\frac{3\sqrt{39}}{20}$. Имаме, че $\sphericalangle AEB=\sphericalangle D_1DB=\varphi$ (кръстни ъгли при $(D_1D \parallel AC) \times BD$) $\Rightarrow$

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC.BD.\sin\varphi=\frac{1}{2}.11.10.\frac{3\sqrt{39}}{20}=\mathbf{\frac{33\sqrt{39}}{4}\ cm^2}$.



Задача 3. а) Построяваме $DH \perp AB$ $(H \in AB) \Rightarrow DH$ е височина в равнобедрения $\triangle ABD$ (по условие $AD = BD = 2$ cm) $\Rightarrow DH$ е и медиана $\Rightarrow AH = HB$. Имаме, че $(ABD) \perp (ABC)$ (по условие), $DH \perp AB$ (по построение), $DH \subset (ABC)$ и $AB = (ABD) \cap (ABC) \Rightarrow DH \perp (ABC) \Rightarrow DH$ е височина на пирамидата $ABCD \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3} DH . S_{ABC}$. Понеже ъглите между околните ръбове на дадената пирамида са по $60° \Rightarrow \sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC = \sphericalangle ADC = 60° \Rightarrow$ равнобедреният $\triangle ABD$ е равностранен $\Rightarrow$ $AB = 2$ cm $\Rightarrow AH = HB = 1$ cm и $DH = \sqrt{3}$ cm. Нека $CA = x$, $CH = y$ и $CD = z$. Разглеждаме $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$: 1) $AD = BD = 2$ cm (по условие); 2) CD е обща страна; 3) $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDC = 60°$ (по условие) $\Rightarrow$ $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ (по I признак) $\Rightarrow BC = AC = x \Rightarrow CH$ е медиана в равнобедрения $\triangle ABC \Rightarrow CH$ е и височина. Като приложим Питагоровата теорема за $\triangle BHC$, получаваме, че $x^2 = y^2 + 1$ (1).
От $DH \perp (ABC)$ и $CH \subset (ABC) \Rightarrow DH \perp CH \Rightarrow DH^2 + CH^2 = CD^2$, т.е. $3 + y^2 = z^2 \Leftrightarrow y^2 = z^2 - 3$ (2).
Прилагаме косинусовата теорема за $\triangle BCD$: $x^2 = 4 + z^2 - 4z.\frac{1}{2} = 4 + z^2 - 2z$ (3). От (1) и (2) $\Rightarrow$ $x^2 = z^2 - 3 + 1 = z^2 - 2$ (4), а от (3) и (4) $\Rightarrow 4 + z^2 - 2z = z^2 - 2 \Leftrightarrow z = 3$, откъдето намираме, че $y = \sqrt{6} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}.2.\sqrt{6} = \sqrt{6}$ cm^2 $\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3}.\sqrt{3}.\sqrt{6} = \mathbf{\sqrt{2}}$ **cm^3.**

б) Построяваме $AA_1 \perp (BCD)$ $\left(A_1 \in (BCD)\right) \Rightarrow$ ортогоналната проекция на AD върху (BCD) е A_1D и AA_1 е височина на пирамидата $ABCD \Rightarrow \sphericalangle\left(AD; (BCD)\right) = \sphericalangle(AD; A_1D)$. Да означим този ъгъл с α.
Тогава $\sin\alpha = \frac{AA_1}{AD}$. Имаме, че $V_{ABCD} = \frac{1}{3} AA_1 . S_{BCD} = \frac{1}{3} AA_1 . \frac{1}{2}.2.3.\sin 60° = \frac{AA_1\sqrt{3}}{2}$.
От подточка а) знаем, че $V_{ABCD} = \sqrt{2}$ cm^3 $\Rightarrow \frac{AA_1\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow AA_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,
т.е. $\mathbf{\sin\sphericalangle\left(AD; (BCD)\right) = \frac{\sqrt{6}}{3}}$.



Задача 4. Уравнението има смисъл за всяко реално число x.

$5^{\cos 2x} + a.25^{\sin^2 x} - 6 = 0 \Leftrightarrow 5^{1-2\sin^2 x} + a.\left(5^2\right)^{\sin^2 x} - 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{5^{2\sin^2 x}} + a.5^{2\sin^2 x} - 6 = 0.$

Нека $t = 5^{2\sin^2 x} > 0 \Rightarrow \frac{5}{t} + at - 6 = 0 \Leftrightarrow at^2 - 6t + 5 = 0.$

а) При $a = 1 \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0$. Последното уравнение има корени $t_1 = 1$ и $t_2 = 5$ ($1 > 0$ и $5 > 0$).

1) $5^{2\sin^2 x} = 1 \Leftrightarrow 5^{2\sin^2 x} = 5^0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

2) $5^{2\sin^2 x} = 5 \Leftrightarrow 5^{2\sin^2 x} = 5^1 \Leftrightarrow 2\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

От $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ получаваме $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2m\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2m\pi \end{array}\right.$, $m \in \mathbb{Z}$, а от $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ – $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2n\pi \end{array}\right.$, $n \in \mathbb{Z}$.

И така, при $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ имаме, че $x = \frac{\pi}{4} + s\frac{\pi}{2},\ s \in \mathbb{Z}$. **Отговор :** $\left[\begin{array}{l} x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + s\frac{\pi}{2},\ s \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

б) $\frac{3\pi}{4} < x < \pi \Leftrightarrow \sin\frac{3\pi}{4} > \sin x > \sin\pi$ $\left(\sin x \text{ е намаляваща функция за } x \in \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right)\right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} > \sin x > 0$

$\Leftrightarrow 0 < \sin^2 x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < 2\sin^2 x < 1 \Leftrightarrow 5^0 < 5^{2\sin^2 x} < 5^1$ ($5 > 1 \Rightarrow 5^x$ е растяща функция) $\Leftrightarrow 1 < t < 5$.

Нека $f(t) = at^2 - 6t + 5$. Тогава даденото уравнение ще има решение в интервала $\left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$, когато уравнението $f(t) = 0$ има решение в интервала $(1; 5)$.

I сл.) При $a = 0 \Rightarrow f(t) = 0 \Leftrightarrow -6t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{6} \notin (1; 5) \Rightarrow a = 0$ не е решение.

II сл.) При $a \neq 0 \Rightarrow f(t)$ е квадратен тричлен с дискриминанта $D = 4(9 - 5a)$.

II.1 сл.) Ако $D < 0 \Leftrightarrow a > 1\frac{4}{5}$, уравнението $f(t) = 0$ няма реални корени.

II.2 сл.) Ако $D = 0 \Leftrightarrow a = 1\frac{4}{5}$, $f(t) = 0$ само при $t = 1\frac{2}{3} \in (1; 5) \Rightarrow a = 1\frac{4}{5}$ е решение.

II.3 сл.) Ако $D > 0 \Leftrightarrow a < 1\frac{4}{5}$, уравнението $f(t) = 0$ има 2 реални корена $t_1 < t_2$ и $\frac{t_1 + t_2}{2} = -\frac{-6}{2a} = \frac{3}{a}$.

Понеже $f(1) = a - 6 + 5 = a - 1$ и $f(5) = a.25 - 30 + 5 = 25(a - 1) = 25 f(1)$, трябва да бъде изпълнено $1 < t_1 < t_2 < 5$. Едно необходимо условие за това изискване е $1 < \frac{3}{a} < 5 \Leftrightarrow a \in \left(\frac{3}{5}; 3\right)$. Тогава търсените стойности на реалния параметър *a* трябва да удовлетворяват системата

$\left|\begin{array}{l} D > 0 \\ 1 < \frac{3}{a} < 5 \\ a > 0 \\ f(1) > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow a \in \left(1; 1\frac{4}{5}\right)$. **Отговор :** $\mathbf{a \in \left(1; 1\frac{4}{5}\right]}$.

За всяка вярно решена задача се дават по 4 точки, общо – 16 точки.
Оценката се изчислява по формулата **Оц. = 0,25k + 2**, където **k** е броят на получените точки.